Εφαρμογές: (1) Έστω S κανονική επιφάνεια και $c: I \to S$ καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου. Δείξτε ότι c γεωδαισιακή της $S \iff \ddot{c} \parallel N \circ c$

Έχουμε ότι c γεωδαισιακή $\iff \frac{D\dot{c}}{ds} = 0$

$\frac{D\dot{c}}{ds} = \ddot{c} - \langle \ddot{c}, N \circ c \rangle N \circ c = 0 \iff \ddot{c} = \langle \ddot{c}, N \circ c \rangle N \circ c$

$\iff \ddot{c} = M \cdot N \circ c$, $M = \langle \ddot{c}, N \circ c \rangle$ Άρα $\boxed{\ddot{c} \parallel N \circ c}$

(2) Έστω $c: I \to \mathbb{R}^3$ με παράμετρο το μήκος τόξου και καμπυλότητα $k(s) > 0$ $\forall s \in I$. Έστω S επιφάνεια με παραμετρική παράσταση $X(s,v) = c(s) + v\bar{b}(s)$. Δείξτε ότι c γεωδαισιακή της S.

Αρχικά, η c περιέχεται στην επιφάνεια αφού $X(s,0) = c(s)$. Τότε $X_s(s,v) = \dot{c}(s) + v\dot{\bar{b}}(s) = \bar{t}(s) - v\tau(s)\bar{n}(s)$

$X_v(s,v) = \bar{b}(s)$, $X_s(s,v) \times X_v(s,v) = \bar{t} \times \bar{b} - v\tau\, \bar{n} \times \bar{b}$
$= -\bar{n} - v\tau\bar{t}$

και $\|X_s(s,v) \times X_v(s,v)\| = \sqrt{1 + v^2\tau^2}$

Τότε $N(s,v) = \frac{X_s \times X_v}{\| X_s \times X_v \|} = \frac{-\bar{n}(s) - v\tau \bar{t}(s)}{\sqrt{1+v^2\tau^2}}$

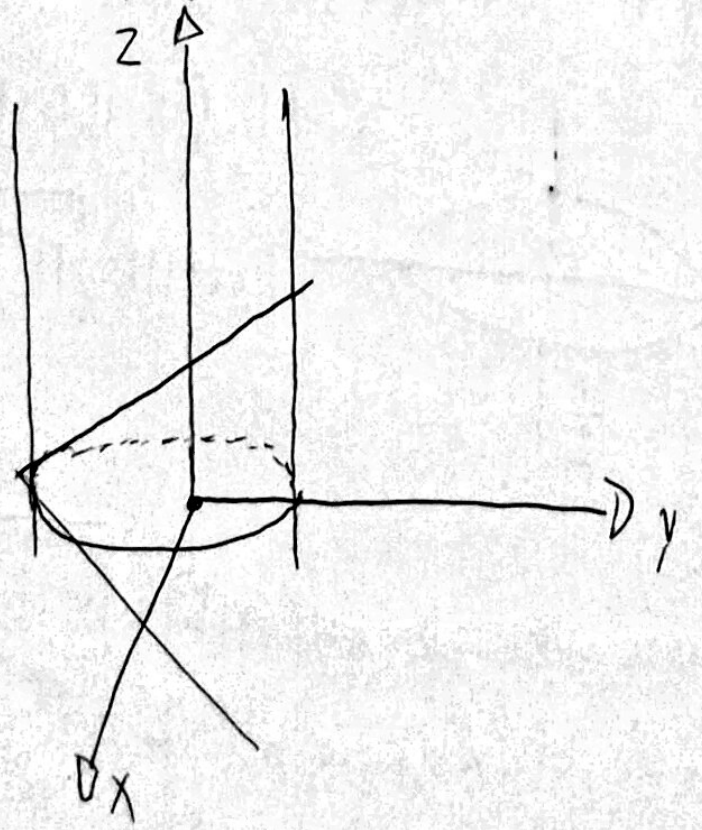
$\Rightarrow (N \circ c)(s) = N(s,0) = -\bar{n}(s)$. Όμως $\ddot{c}(s) = \dot{t}(s) = k(s)n(s)$

Άρα $\ddot{c}(s) \,//\, (N \circ c)(s) \Rightarrow c$ γεωδαισιακή της S

(3) Θεωρούμε τον κύλινδρο $S: x^2+y^2=1$ και επίπεδο Π: που περιέχει τον άξονα x και σχηματίζει γωνία θ με το επίπεδο Oxy. Θεωρώ την καμπύλη $c = S \cap \Pi$

(α) Δείξτε ότι c έλλειψη

(β) Υπολογίστε τη γεωδαισιακή καμπυλότητα της c στις κορυφές της.



(α)

(Β) Γνωρίζουμε $\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2$.

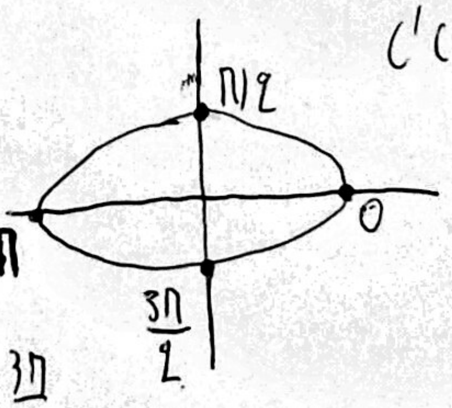
(Π): $y + \cos\theta\, z = 0$ Άρα $C = S \cap \Pi = \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y + \cos\theta\, z = 0 \end{cases}$

$c(t) = \left(\cos t, \sin t, -\frac{\sin t}{\cos\theta}\right)$, $\kappa(t) = \frac{ab}{\left(\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\right)^3}$

$c'(t) = \left(-\sin t, \cos t, \frac{-\cos t}{\cos\theta}\right)$

$\|c'(t)\| = \sqrt{1 + \frac{\cos^2 t}{\cos^2\theta}}$

Οι κορυφές της έλλειψης είναι τα σημεία όπου $\kappa'(t) = 0 \ldots$



Κορυφές: $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

Τότε a = μεγάλος ημιάξονας $= \max\|c'(t)\|^2 = 1 + \frac{1}{\cos^2\theta}$

b = μικρός ημιάξονας $= \min\|c'(t)\|^2 = 1$

Τότε $K(0) = \frac{a b}{(b^2)^{3/2}} = \frac{ab}{b^3} = ab = 1 + \frac{1}{\cos^2\theta}$.

$$K\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{ab}{(a^2)^{3/2}} = \frac{ab}{a^3} = \frac{b}{a^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^2}$$

$$K(\pi) = \frac{ab}{(b^2)^{3/2}} = \frac{ab}{b^3} = 1 + \frac{1}{\cos^2\theta}, \quad K\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^2}.$$

Επίσης $K_n(c'(0)) = \frac{II(c'(0))}{I(c'(0))}$, $I(c'(0)) = \|c'(0)\|^2$.
$= \left\|\left(0, 1, \frac{1}{\cos\theta}\right)\right\|^2 = 1 + \frac{1}{\cos^2\theta}$

$$II_{(c'(0))} = \left(L_{c'(0)}, c'(0)\right) = \left(-dN_{c'(0)}, c'(0)\right)$$

Για τον κύλινδρο $N(x,y,z) = (x,y,0)$ Άρα $L_{(c'(0))} = (0,1,0)$

Και $II_{c'(0)} = 1$. Τότε $K_n(c'(0)) = \frac{1}{1+\frac{1}{\cos^2\theta}} = \frac{1}{\frac{\cos^2\theta+1}{\cos^2\theta}} = \frac{\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta}$.

Άρα αφού $K^2 = K_g^2 + K_n^2 \Rightarrow K_g^2(0) = \left(\frac{\cos^2\theta+1}{\cos^2\theta}\right)^2 - \left(\frac{\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta}\right)^2$

Επίσης $K_n\left(c'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{II\left(c'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}{I\left(c'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}$, $I\left(c'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left\|c'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\|^2 = 1$

$$II\left(c'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(L_{c'\left(\frac{\pi}{2}\right)}, c'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left((-1,0,0), (-1,0,0)\right) = 1$$

Άρα $K_n\left(c'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1$. Τότε $K_g^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{1}{(1+\cos^2\theta)^2}\right)^2 - 1$.

(4) Να δειχθεί ότι αν όλες οι γεωδαισιακές συνεκτικής κανονικής επιφάνειας S είναι επίπεδες καμπύλες. Τότε η S τμήμα σφαίρας ή επιπέδου

Θεωρώ $p \in S$ και $w \in T_p S \setminus \{0\}$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει μοναδική γεωδαισιακή $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ με $c(0) = p$ και $c'(0) = w$, $\|c'(t)\| = \|c'(0)\| = \|w\| = 1$. Άρα t μήκος τόξου, $t = s$. Έστω κ η καμπυλότητα της c ως καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ με $\kappa(s) \neq 0$ $\forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Αφού S επίπεδη $\Rightarrow \tau = 0 \Rightarrow \dot{\bar{b}}(s) = \tau \bar{n}(s) = 0 \Rightarrow b(s) =$ σταθερό

Τότε $L_p(w) = -dN_p(w) = -(N \circ c)'(0)$ (1) Αφού c γεωδαισιακή

$\Rightarrow \ddot{c} \,/\!/\, N \circ c \Rightarrow \ddot{c}(s) \,/\!/\, N(c(s)) \Rightarrow \kappa(s) n(s) \,/\!/\, N(c(s))$

$\Rightarrow N(c(s)) = \pm \bar{n}(s) \Rightarrow (N(c(0)))' = \pm \dot{\bar{n}}(0) = \pm(-\kappa(0)\bar{t}(0) + \underbrace{\tau(0)}_{0}\bar{b}(0))$

$\Rightarrow (N(c(0)))' = \mp \kappa(0)\bar{t}(0) = \mp \kappa \dot{c}(0) = \mp \kappa(0) w$ (2)

(1) κ' (2) $\Rightarrow L_p(w) = \pm \kappa(0) w \Rightarrow w$ ιδιοδιάνυσμα της απεικόνισης Weingarten και επίσης $k_1 = k_2 = \pm \kappa(0)$

Όμως οι μόνες επιφάνειες (συνεκτικές) μ' αυτή την ιδιότητα είναι τμήματα σφαίρας ή επιπέδου.

(5) Έστω S συμπαγής κανονική επιφάνεια η οποία δεν είναι ομοιομορφική με την σφαίρα S^2. Τότε υπάρχουν σημεία ελλειπτικά, σημεία υπερβολικά και σημεία όπου $K=0$

Αφού S συμπαγής επιφάνεια $\Rightarrow$ Θα έχει ελλειπτικό σημείο. Άρα σημείο όπου $K>0$. Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει σημείο όπου $K<0$, δηλαδή $\exists p_0 \in S : K(p_0) < 0$
Έστω ότι δεν υπάρχει $p_0 \in S : K(p_0) < 0$. Άρα
$\forall p \in S \Rightarrow K(p) \geq 0$. Από Θεώρημα Gauss-Bonnet έχουμε ότι $\int_S K ds = 2\pi X(S) \geq 0$. Όμως $X(S) = \{2, 0, -2, -4, \dots\}$
$\Rightarrow X(S) = 2$ ή $X(S) = 0$. Αν $X(S) = 2 = X(S^2) \Rightarrow S$ ομοιομορφική με S^2 (άτοπο). Άρα $X(S) = 0$. Τότε $K \equiv 0$ (άτοπο) αφού σίγουρα υπάρχουν σημεία όπου $K<0$. Άρα το άτοπο προήλθε από την υπόθεση $\forall p \in S$ $K(p) \geq 0$, έτσι $\exists p_0 \in S : K(p_0) < 0$. Έχουμε δείξει ότι $\exists p_0 \in S : K(p_0) < 0$ και ότι $\exists p_1 \in S : K(p_1) > 0$. Μένει να δείξουμε ότι $\exists p_2 \in S : K(p_2) = 0$. Όμως λόγω του Θεωρήματος Bolzano $\exists p_2 \in (p_0, p_1) \subseteq S$ $: K(p_2) = 0$

(6) Έστω S κανονική επιφάνεια και $c: I \to S$ καμπύλη

Να δειχθεί ότι: (α) Αν η c είναι γραμμή καμπυλότητας και γεωδαισιακή τότε είναι επίπεδη

(β) Αν c γεωδαισιακή και επίπεδη τότε είναι γραμμή καμπυλότητας

(γ) Ισχύει ότι αν η c είναι γραμμή καμπυλότητας και επίπεδη τότε θα είναι και γεωδαισιακή;

(α) Έστω ότι c γραμμή καμπυλότητας $\xrightarrow[\text{Rodrigues}]{\text{Θεώρημα}} (N\circ c)^{\cdot}(s) \parallel \dot{c}(s)$

c γεωδαισιακή $\Rightarrow \ddot{c}(s) \parallel (N\circ c(s))$

Αφού c έχει καμπυλότητα $k(s) \neq 0$

Υποθέτω ότι η c έχει καμπυλότητα $k(s) \neq 0$

Τότε $\ddot{c}(s) = \dot{t}(s) = k(s)n(s)$ Άρα $k(s)n(s) \parallel N\circ(c(s))$

$\Rightarrow (N\circ c)(s) = \pm n(s) \Rightarrow (N\circ c)^{\cdot}(s) = \pm \dot{n}(s) = \pm\left(-k(s)t(s) + \tau(s)\,b(s)\right)$

Όμως $(N\circ c)^{\cdot}(s) \parallel \dot{c}(s) = t(s)$. Άρα $\tau(s) = 0$

$\Rightarrow c$ επίπεδη

(β) Αφού c γεωδαισιακή $\Rightarrow \ddot{c} \parallel N\circ c$. Αν υποθέσουμε ότι c καμπύλη με $\kappa(s)\neq 0 \Rightarrow \ddot{c} = \kappa \bar{n}(s)$.

Άρα $N\circ c \parallel \kappa(s)\, n(s) \Rightarrow (N\circ c)(s) = \pm n(s)$

$\Rightarrow (N\circ c)^{\cdot}(s) = \pm\left(-\kappa(s)\bar{t}(s) + \tau(s)\bar{b}(s)\right)$ όμως αφού c επίπεδη $\Rightarrow \tau = 0$. Άρα $(N\circ c)^{\cdot}(s) = \pm\left(-\kappa(s)\bar{t}(s)\right)$

$\Rightarrow (N\circ c)^{\cdot}(s) \parallel \bar{t}(s) = \dot{c}(s)$. Άρα από Θ. Rodrigues

$\Rightarrow$ c γραμμή καμπυλότητας.

(γ) Όχι αφού άμα πάρουμε το παράδειγμα του επιπέδου τότε όλες του οι καμπύλες είναι γραμμές καμπυλότητας αλλά δεν είναι γεωδαισιακές όλες παρά μόνο οι ευθείες

(7) Δείξτε ότι σε επιφάνεια με σταθερή καμπυλότητα Gauss οι γεωδαισιακοί κύκλοι έχουν σταθερή γεωδαισιακή καμπυλότητα

Θεωρούμε σύστημα $X(\rho,\theta)$ γεωδαισιακών πολικών συντεταγμένων, όπου $\rho>0$ και $\theta<2\pi$.

Οι γεωδαισιακοί κύκλοι είναι παραμετρικές καμπύλες όπου $X(\rho=\sigma\tau\alpha\theta,\theta)$. Έστω $c(s)=X(\rho_0=\sigma\tau\alpha\theta,\theta)$ γεωδαισιακός κύκλος ακτίνας ρ_0 με παράμετρο το μήκος τόξου δηλαδή $\|\dot{c}(s)\|=1$

$\Longleftrightarrow I_{c(s)}(\dot{c}(s))=1$ Όμως $E=1$, $F=0$

και $G(\rho,\theta)=\begin{cases} \rho^2, & K=0 \\ \frac{1}{K}\sin^2(\sqrt{K}\rho), & K>0 \\ -\frac{1}{K}\sinh^2\sqrt{-K}\rho, & K<0 \end{cases}$

$\dot{c}(s)=\dot{\theta}(s)\,X_\theta(\rho_0,\theta(s))$, τότε $\|\dot{c}(s)\|^2=1=I_{c(s)}(\dot{c}(s))$

$=\underbrace{Ea^2}_{0}+\underbrace{2Fab}_{0}+b^2G=G(\dot{\theta}(s))^2 \Rightarrow G(\rho_0,\theta(s))(\dot{\theta}(s))^2=1$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} \rho_0^2\cdot(\dot{\theta}(s))^2=1, & K=0 \\ \frac{1}{K}\sin^2(\sqrt{K}\rho_0)\cdot(\dot{\theta}(s))^2=1, & K>0 \\ -\frac{1}{K}\sinh^2\sqrt{-K}\rho_0\cdot(\dot{\theta}(s))^2=1, & K<0 \end{cases}$

$$K_g=\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{G_\rho\frac{d\theta}{ds}+\cancel{E_\theta\frac{d\rho}{ds}}\right\}+\frac{d\varphi}{ds},\quad \varphi=\angle(c',X_\rho)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{G(\rho_0,\theta(s))}}\cdot\left\{G_\rho(\rho_0,\theta(s))\,\dot{\theta}(s)\right\}$$

Αν $\kappa=0$ $\rho_0^2(\dot\theta(s))=1 \Rightarrow \sqrt{(\rho_0(\dot\theta(s)))^2}=1 \Rightarrow |\rho_0(\dot\theta(s))|=1$

$\Rightarrow \rho_0\cdot\dot\theta(s)=1$ (αφού $\rho_0>0, \dot\theta(s)\geq 0$), $G(\rho_0,\theta)=\rho_0^2$, $G_\rho(\rho_0,\theta)=2\rho_0$

$$K_g=\frac{1}{2\sqrt{\rho_0^2}}\cdot 2\rho_0\cdot\dot\theta(s)=\frac{1}{\rho_0}$$

8) Δίνονται οι επιφάνειες $S_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\}$

και $S_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^{10}+z^6=1\}$

Δείξτε ότι είναι συμπαγείς κανονικές επιφάνειες και υπολογίστε την καμπυλότητα Gauss αυτών.

<u>Για την S_1:</u> Θεωρώ την $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ με $f(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$

όπου $S_1=f^{-1}(0)$. Τότε $\nabla f(x,y,z)=\left(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2}\right)$

Άρα το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f είναι το $(0,0,0)\notin S_1$. Άρα S_1 κανονική. Επίσης $S_1=f^{-1}(\{0\})$ και αφού f συνεχής αντιστρέφεται τα κλειστά σε κλειστά. Το $\{0\}$ είναι κλειστό $\Rightarrow S_1$ κλειστό.

Επίσης $\frac{x^2}{a^2}\leq\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1 \Rightarrow x^2\leq a^2$

$\frac{y^2}{b^2}\leq\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1 \Rightarrow y^2\leq b^2$

$\frac{z^2}{c^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \Rightarrow z^2 \leq c^2$, όπου $p=(x,y,z) \in S_1$

Τότε $d(p,0) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq \sqrt{a^2+b^2+c^2} \Rightarrow S_1$ φραγμένο

και ως κλειστό και φραγμένο S_1 συμπαγές.

Θεώρημα G-B $\Rightarrow \iint_{S_1} K d\sigma = 2\pi X(S_1)$ S_1 ομοιομορφική με S^2 $\Rightarrow X(S_1) = X(S^2) = 2$. Άρα $\boxed{\iint_{S_1} K d\sigma = 4\pi}$

<u>Για την S_2:</u> $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^{10} + z^6 = 1\}$

Θεωρούμε την $f(x,y,z) = x^2 + y^{10} + z^6 - 1$, με $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Τότε $\nabla f(x,y,z) = 2x + 10y^9 + 6z^5$ με μοναδικό κρίσιμο σημείο το $(0,0,0) \notin f^{-1}(0) = S_2$ Άρα S_2 κανονική. Όμοια η f συνεχής που σημαίνει ότι αντιστρέφει κλειστά σε κλειστά $\Rightarrow S_2$ κλειστή. Έστω p $(x,y,z) \in S_2$

Τότε $x^2 \leq x^2 + y^{10} + z^6 \leq 1$, $y^{10} \leq x^2 + y^{10} + z^6 \leq 1$, $z^6 \leq x^2 + y^{10} + z^6 \leq 1$

Τότε $d(p,0) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq \sqrt{x^2+y^{10}+z^6} \leq \sqrt{3}$ Άρα S_2 φραγμένη. Επιπλέον Θεωρούμε την $\varphi: S_2 \to S^2$ με $\varphi(x,y,z) = (x, y^5, z^3)$ η φ ομοιομορφισμός. Άρα S_2 ομοιομορφική με την S^2. Από Θεώρημα Gauss-Bonnet

$\Rightarrow \iint_{S_2} K d\sigma = 2\pi X(S_2) = 4\pi$

(9)
Έστω S_1, S_2 κανονικές επιφάνειες και $\varphi, \psi : S_1 \to S_2$
Θεωρούμε ότι υπάρχει σημείο ώστε $\varphi(p) = \psi(p)$
και $d\varphi(p) = d\psi(p)$. Να δειχτεί ότι $\varphi = \psi$

Έστω U_0 κανονική περιοχή των p και $\tilde{p}$, με
$\tilde{p} \in U_0$. Τότε υπάρχει γεωδαισιακή $\gamma : [0, L] \to U_0$
με $\gamma(0) = p$, $\gamma(L) = \tilde{p}$. Έστω $\gamma_1 : \varphi \circ \gamma : [0, L] \to S_2$
$\gamma_2 : \psi \circ \gamma : [0, L] \to S_2$

Αφού φ, ψ ισομετρικές $\Rightarrow \gamma_1, \gamma_2$ γεωδαισιακές της
S_2. Τότε $\gamma_1(0) = \varphi(\gamma(0)) = \varphi(p) = q$, $\gamma_1'(0) = (\varphi \circ \gamma)'(0) =$
$= d\varphi_p(\gamma'(0))$, $\gamma_2(0) = \psi(\gamma(0)) = \psi(p) = q$
Επιπλέον, $\gamma_2'(0) = (\psi \circ \gamma)'(0) = d\psi_p(\gamma'(0))$
Όμως $d\varphi(p) = d\psi(p) \Rightarrow \gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$ και $\varphi(p) = \psi(p)$
$\Rightarrow \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. Άρα έχουμε δυο γεωδαισιακές
που περνάνε από το ίδιο σημείο με την
ίδια ταχύτητα. Όμως γνωρίζουμε ότι αυτό ισχύει
για μοναδική γεωδαισιακή $\Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2$. Όμοια για
το L. Τότε $\varphi|_{U_0} = \psi|_{U_0}$. Λόγω συμπαγότητας
$\Rightarrow \boxed{\varphi = \psi}$

Σημείωση: Την Τρίτη 31/5/2016, 6-9 -42-
Θα γίνει απαλλακτική πρόοδος